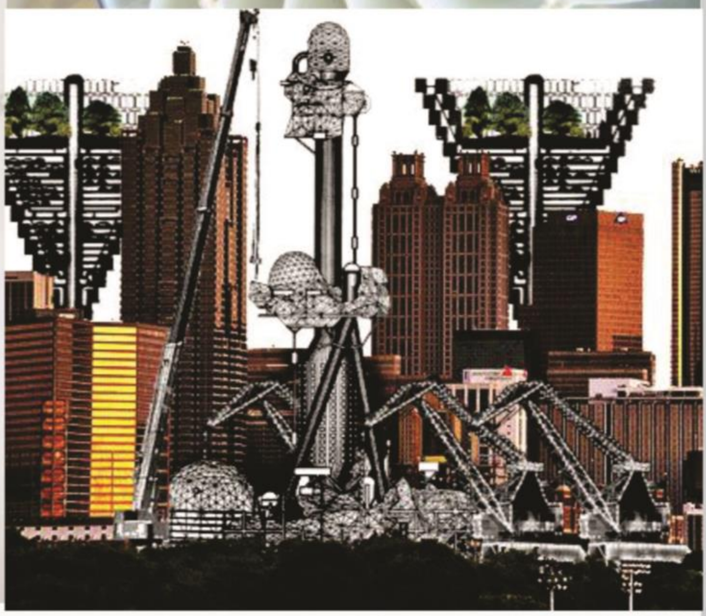
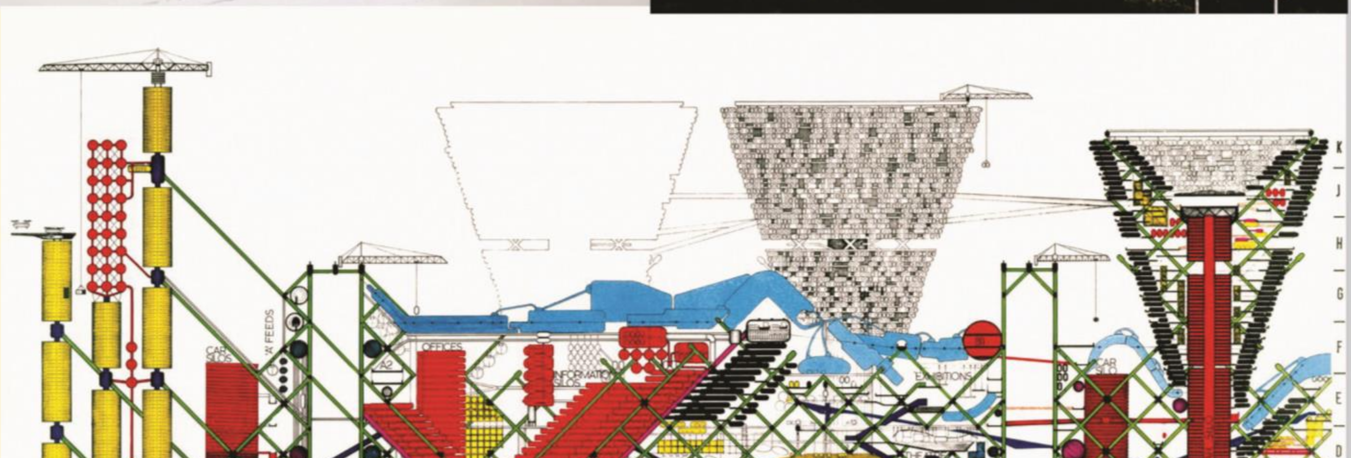
Dr. Francisco Javier Wong Cabanillas
EDITOR & COMPILADOR

SISTEMAS DINÁMICOS



Buscando la optimización dinámica

Joel Fernando Machado Vicente
Ingeniería de Sistemas - Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
Magister en Dirección de Tecnologías de Información – ESAN.
Doctorando en Gestión de Empresas - Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
Solido conocimiento y experiencia en gerencia y gestión de proyectos de tecnologías de información, desempeño en el sector público y privado, con estudios de especialización en el gobierno y gestión de servicios basadas en COBIT, ITIL, y estándares para la seguridad de la información.
Correo electrónico: jmachadov@gmail.com

Resumen
El ser humano por naturaleza no solo busca alcanzar sus objetivos, también busca mejorar la manera en la que logra alcanzarlos, de esta manera desde hace muchos años se ha tratado de dar solución a diversos problemas de la manera más óptima, apoyados por las ciencias matemáticas u otras ciencias. La economía no es ajena a diversos problemas que se han presentado durante las últimas décadas, teniendo en las herramientas de optimización dinámica una forma de determinar el valor de sus variables para que los resultados que se obtengan sean los mejores posibles. El presente trabajo muestra los principios matemáticos la teoría del cálculo de variaciones y el control óptimo, de la manera más clara tratándose de un tema riguroso en términos matemáticos.

Palabras Clave: Optimización, variaciones, Control, tiempo, estocástico, continuo, discreto, dinámico.

Abstract

The human being by nature not only seeks to achieve its objectives, but also seeks to improve the way in which it is glimpsed, this way many years ago has tried to solve several problems in the most optimal, supported by the Mathematical sciences or other sciences. The economy is not alien to the problems they have presented during the last decades, having in the dynamic optimization tools a way of determining the value of their variables so that the results obtained are the best possible. The present work shows the mathematical principles of the theory of the calculation of variations and the optimal control, in the clearest way that deals with a rigorous subject in mathematical terms.

Keywords: Optimization, variations, control, time, stochastic, continuous, discrete, dynamic.

Emilio Cerdá

Emilio Jaime Cerdá Tena, nacido en España, es un Catedrático de la Universidad Complutense de Madrid, en el Departamento de Fundamentos de Análisis Económico, desde agosto de 1992, licenciado en Ciencias Matemáticas, con un Doctorado en el mismo rubro en el año 1987. Ha impartido asignaturas de Matemáticas, Teoría de Juegos, Microeconomía, Economía Pública, Economía Ambiental y Economía de los Recursos Naturales. Actualmente se desempeña como Coordinador del Programa de Doctorado en Economía por la Universidad Complutense de Madrid desde Julio de 2013. El presente artículo presenta un resumen de su libro "Optimización Dinámica" (2001) en el que se realizará una revisión de algunas herramientas para lograr la optimización de los Sistemas Dinámicos, tales como el Cálculo de Variaciones, Control Óptimo en Tiempo Continuo, Control Óptimo en Tiempo Discreto. Es el autor de 69 publicaciones entre libros y artículos, así como la dirección de tesis doctorales.

1. Introducción a la Optimización Dinámica

El ser humano de acuerdo a la teoría de Paul MacLean tiene un modelo de cerebro llamado triuno, donde el último llamada neocórtex (corteza cerebral) nos permite pensar, razonar y planificar; de esta manera la utilidad de realizar planes para nuestro futuro implica una serie de toma de decisiones que pueden afectar de manera positiva o negativa nuestro estado situacional en un tiempo posterior, es decir las elecciones o decisiones que tomemos en nuestro presente tendrán una consecuencia a lo largo de nuestro horizonte de tiempo planificado, lo más importante de esta reflexión es la existencia de una interdependencia entre las decisiones presentes y futuras, de esta manera inducimos que es necesario conocer la mejor decisión en cada instante de tiempo. Uno de los objetivos de la teoría de la Optimización Dinámica es el estudio de Sistemas Reales que provienen de un marco económico, a través de modelos netamente matemáticos que puedan regular su evolución a través de la toma de decisiones correctas, dicho de otra manera, conseguir que un Sistema funciones de una mejor manera respecto a algún criterio predefinido anteriormente. La Optimización Dinámica nace con las ecuaciones diferenciales, la teoría clásica de control y la programación lineal y no lineal. Las ecuaciones diferenciales nacen en el siglo XVIII, los cuales reciben en el trabajo de Euler (1707-1783) y de Lagrange (1736-1783) la forma de una teoría matemática rigurosa. Las ecuaciones diferenciales se desarrollaron a partir del problema de la curva braquistócrona, el cual a través de múltiples colaboradores (Bernoulli, Euler, Legendre, Poison, Jacobi, Sarrus, Cauchy, Hadamard, Clarke, entre otros) logró desarrollar nuevas herramientas matemáticas dentro de la teoría de Control Óptimo. El problema de la curva Braquistócrona (Bernoulli, 1696) consiste en encontrar una curva en un plano cartesiano que vaya desde la posición A hacia la B, de tal manera que el material se deslice sin fricción en el menor tiempo posible, si se desea mostrar bajo una fórmula utilizando principios de mecánica clásica se vería de la siguiente manera:

$$\min_f T[f] = \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1+(f'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_0-y)}}\,dx$$

Cuando hablamos de Optimización Dinámica estamos a "la búsqueda de un control que maximice o minimice un criterio representativo de la eficiencia de un Sistema" (Dreyfus, 1965).

Para poder resolver un problema de control óptimo se debe tener en cuenta las siguientes variables:

- El Tiempo, es una variable continua.
- Variables de Estado, son un conjunto de funciones continuas que dependen del tiempo, que en su totalidad forman el vector de estado.
- Variables de Control, son un conjunto de variables que pueden ser continuas de manera parcial, que en su totalidad generan el vector de control.
- Ecuaciones de movimiento: Es un conjunto de ecuaciones diferenciales.
- Funcional objetivo: que depende de las variables de control y de tiempo.

En base a la definición de las variables indicadas se pueden deducir que las soluciones de optimización dinámica se soportan sobre una unidad de tiempo, de esta manera no se obtiene una sola magnitud óptima, sino una secuencia de acciones óptimas, donde cada una de ellas encaja en la unidad de tiempo. La solución por ende tendrá la forma de una trayectoria óptima en el tiempo, detallando el mejor valor para hoy, mañana, entre otros, en base a una suma de decisiones óptimas, un conjunto de acciones para mejorar nuestro estado actual (variables de Estado) a través de la aplicación de las variables de Control, y estas trayectorias seleccionadas forman las ecuaciones de movimiento.

En base a lo indicado se puede adjudicar a las ecuaciones diferenciales como un método para superar el problema de la optimización dinámica:

$$\text{Máx. o Mín. } V[x] = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t), \dot{x}(t)]dt$$

$$\begin{aligned} \text{s.t} \quad & x(t_0) = x_0 \qquad (t_0, t_1, x_0, x_1 \text{ dados}) \\ & x(t_1) = x_1 \end{aligned}$$

Entre los ejemplos que podremos indicar sobre optimización dinámica resaltan los de carácter económico como el precio de un producto o un servicio en una empresa, el nivel de producción y productividad de una organización o un país, los cuales pueden ser explicados a través de un problema de optimización donde tenemos una función objetivo (bienestar del agente optimizador) y las restricciones (restricciones del individuo).

2. Cálculo de Variaciones

El problema más importante de cálculo de variaciones tiene como resultado la ecuación de Euler, históricamente el problema que dio origen a este cálculo fue la Braquistócrona "Dados los puntos A y B situados en un plano vertical, pero no en la misma recta vertical, y a diferentes alturas, se trata de encontrar la forma de la curva que los une, de manera que una partícula que se deslice por ella vaya desde A hasta B en un tiempo mínimo, suponiendo gravedad constante y que no hay fricción"

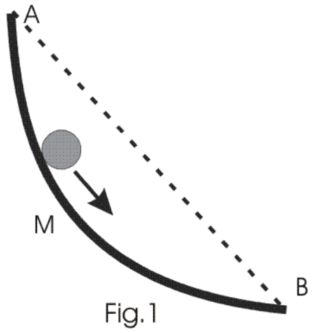


Fig. 1

Para dicho problema de optimización se debe seleccionar la función óptima dentro de un conjunto de funciones, un problema de cálculo de variaciones es análogo a un problema de programación matemática, por lo tanto, definiremos los conceptos de óptimo global y óptimo local. Las condiciones necesarias para lograr la optimización son:

- Condición de primer orden: La ecuación de Euler es la más importante del cálculo de variaciones, tal como se mencionó se apoya en la programación matemática clásica de funciones diferenciables.
- Condición de segundo orden: La condición de Legendre que es necesaria para la optimalidad local de cálculo de variaciones y que distingue entre candidatos a máximo y candidatos a mínimo.

3. El problema del Control Óptimo

La teoría del Control Óptimo es una generalización del cálculo de variaciones (desarrollado por Pontryagin) que puede resolver problemas más complejos de optimización Inter temporal como por ejemplo la emisión monetaria o la inflación de un país, el gasto en publicidad o las ventas de una empresa, teniendo en cuenta que la variable de control está sujeta a la decisión del agente que enfrenta el problema de optimización, y la variable de estado refleja el resultado de las decisiones.

Muchos problemas del ámbito económico pueden ser resueltos a través del método de Cálculo de variaciones, pero el método de control óptimo permite monitorear la evolución dentro de un sistema dinámico, por lo tanto, se parte de un sistema que presenta un cambio o evolución en un lapso de tiempo y que se puede modelar a través de una ecuación de estado que describe la evolución de las variables de estado ***x(t)***, las cuales dependen de otra función ***u(t)*** sobre la que se tiene el control (variables de control), éstas permiten influir en los cambios y evoluciones que lograrán tener máximo un funcional. Lo indicado se puede mostrar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\underset{u(t)}{Max} \int_{t_0}^{t_1} f(x(t),u(t),t)\,dt \\ &\text{sujeto a:} \quad x'(t) = g(t,x(t),u(t)), \\ &\qquad\qquad t_0, t_1, x(t_0) \text{ fijo}; \quad x(t_1) \text{ libre} \end{aligned}$$

Donde ***f*** y ***g*** son continuamente diferenciables, ***u(t)*** puede ser continuo a trozos y ***u(t)*** es continuamente diferenciable.

Los problemas de control óptimo pueden presentar un número totalmente diferente a las variables de estado (mayor, menor o igual).

3.1. El Control Óptimo en tiempo continuo

El problema básico en tiempo continuo y su resultado para obtener la solución se plantea en el principio del máximo de Pontryagin, se debe tener en cuenta que el control óptimo se define como el control admisible que maximice el funcional objetivo, en este caso con la presencia de restricciones para los controles de estado o entrada.

3.1.1. El Principio del Máximo

El problema básico y más sencillo en tiempo continuo a diferencia del cálculo de variaciones, que involucra un punto terminal libre de la variable de estado y su resultado para obtener la solución se plantea a partir de la función objetivo, la restricción y una variable auxiliar λ, llamada multiplicador de Lagrange, que conforma la función llamada Langragiana, los valores que resuelven el problema se determinan a partir de la optimización de esta función.

3.2. El Control Óptimo en tiempo discreto

Los problemas básicos de control óptimo en tiempo discreto se resuelven con el método de la programación dinámica de Bellman, que fue publicado en 1957.

Se considera un sistema dinámico en tiempo discreto para un número determinado de periodos que evoluciona con el tiempo.

3.2.1. Programación Dinámica

La Programación Dinámica es una técnica de optimización inter temporal para la formulación de problemas económicos desarrollada por Richard Bellman en el año 1957, siendo similar a la de control óptimo:

$$
\begin{array}{lll}
\textit{Maximizar} & V = \sum_{t=0}^{T} f_t(y_t, u_t) + Z(y_{T+1}) & \\
\textit{sujeto a} & y_{t+1} \leq g_t(y_t, u_t) & \forall t = 0,1,2,\ldots T \\
 & y_0 \; \textit{dado} & \\
 & y_{t+1} \; \textit{libre} & \\
 & y_t \geq 0 & \\
 & u_t \geq 0 &
\end{array}
$$

Inicialmente fue creada para resolver problemas formulados en tiempos discretos, pero ahora son formulados para resolución de problemas en tiempo continuo. Este método resuelve un problema en N etapas, mediante la resolución de N problemas de una etapa.
Uno de los problemas más comunes es la de optimización de rutas, donde se debe buscar el mejor recorrido entre dos puntos de tal manera que la distancia sea la menor.

4. Conclusiones

- Se debe tener en cuenta los diferentes métodos y herramientas para optimizar los problemas que tengan como variable base al tiempo.
- Actualmente se tiene una diversidad tecnológica que complementada con la democratización del internet en los últimos años brindará soluciones relacionadas al aspecto social, empresarial, entre otros.
- Los métodos para resolución de los problemas mencionados en las lecturas de Optimización Dinámica datan de décadas anteriores, con el avance tecnológico y la

evolución de la Infraestructura de procesamiento de datos, se proyecta un aprovechamiento de nuevas oportunidades en el aspecto económico.

- Se debe difundir los métodos de resolución de problemas a otros sectores que permita explotar el conocimiento y dar solución a las necesidades que son cambiantes en el tiempo.
- Se debe evaluar si se utilizan las herramientas existentes para tomar las mejores decisiones a nivel empresarial y a nivel del país, y tomar medidas correctivas al respecto.

5. Literatura citada

Cerdá, E. Optimización Dinámica. Pearson Educación. Madrid. España. 2001.

Bonifaz, J., Lama, Ruy. Optimización Dinámica y Teoría Económica. Centro de investigación de Universidad del Pacífico. Lima. Perú. 2013.

Rodríguez, M., Lopez M., Perez, B. Aplicaciones económicas del control óptimo Optimización Dinámica. Pearson Educación. 2010.

Mauricio, J. Optimización Dinámica – Control Óptimo. Implementaciones en Mathematica y Maple. Argentina. 2011.