SISTEMAS DINÁMICOS

Dr. Francisco Javier Wong Cabanillas
Editor & Compilador

2018

SISTEMAS DINÁMICOS 2018

SISTEMAS DINÁMICOS 2018

Dr. Francisco Javier Wong Cabanillas
EDITOR & COMPILADOR

Sistemas Dinámicos

Editor: Dr. Francisco Javier Wong Cabanillas

Dirección: Av. El Retablo 808 2do. Piso Urb. El Retablo, Comas. Lima-Perú

Correo electrónico: fjavierwongc@yahoo.es

Compilador: Dr. Francisco Javier Wong Cabanillas

Diseño y Redacción: Bach. Carlos Alberto Vega Vidal

ISBN: 978-612-00-4024-9

Primera edición digital: diciembre 2018

Libro electrónico disponible en: http://ctscafe.pe

Modelo de producción–inventario con tiempo de espera proporcional al tiempo de producción

Ing.Carlos Enrique Céspedes Blanco
Ingeniero Mecánico – Pontificia Universidad Católica del Perú.
MBA – CENTRUM. Pontificia Universidad Católica del Perú.
Doctorando en Gestión de Empresas - Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
Especializado en Mantenimiento Industrial - Japan International Cooperation Agency.
Docente de la Universidad de Ciencias Aplicadas del Perú.
Correo Electrónico: ccespedes.ccb@gmail.com

Resumen: El presente artículo estudia un modelo de producción–inventario con tasas de demanda y producción constantes planteado por H. Laniado y A. García en 2006. El modelo supone tiempo de espera, referido al tiempo en que la unidad de producción está in-habilitada, es proporcional al tiempo de actividad de la misma. El objetivo es desarrollar un modelo matemático y determinar el número óptimo de ciclos que maximice la utilidad.

Palabras claves: Producción/ Inventario/ Ciclos/ Optimización/ Tiempo de parada

Abstract: In this article is studied an inventory–production model with demand and production rates constants over time, by H. Laniado and A. García in 2006. One hypothesis is that waiting time, refereed to the time which the productive unit is off, is proportional to the working time of the same unit. The objective is to develop a mathematical model and to determine optimal number of cycles maximizing profit.

Keywords: Inventory/ Production/ Demand/ Cycles/ Optimization/ Downtime

1. Introducción

Biografías

Los autores del paper base del presente artículo son los doctores Henry Laniado Rodas y Andrés Felipe García Suaza.

Dr. Henry Laniado Rodas

Docente investigador de la universidad EAFIT en Colombia. En 2006, cuando se publicó el paper base del presente artículo era Magister en Matemáticas Aplicadas y profesor de la Universidad de Antioquia, Colombia.
El Dr. Henry Laniado Rodas es Licenciado en Física y Matemáticas de la Universidad de Antioquía Colombia (1999), con Maestría en Matemáticas Aplicadas de la Universidad EAFIT, Colombia (2003), Master en Ingeniería Matemática en la Universidad Carlos III de Madrid (2008), doctor en Ingeniería Matemática con énfasis en estadística en la Universidad

Carlos III de Madrid (2012). Su tesis de doctorado ha recibido tres distinciones: Cum Laude, Mención Internacional y premio extraordinario de doctorado. Ha sido ganador del programa de repatriación de doctores: “Es tiempo de volver”, impulsado por Colciencias. Actualmente es investigador postdoctoral en el área de estadística y finanzas en la Facultad de Minas de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín y es docente investigador en estadística en el Departamento de Ciencias Matemáticas de la Universidad EAFIT en Colombia.
Tiene 13 publicaciones en revistas indexadas sobre temas de matemáticas, economía, estadística, operaciones, producción y finanzas. Además, ha recibido reconocimientos de la Universidad Carlos III de Madrid y la Universidad EAFFIT en Colombia

Dr. Andrés Felipe García Suaza.

Es Profesor Principal en la Universidad de Antioquia, Colombia y pertenece al Grupo de Investigación de la Facultad de Economía. En 2006, cuando se publicó el paper base del presente artículo era estudiante de economía, asistente de investigación en la Universidad de Antioquia, Colombia.
El doctor Andrés García Suaza hizo su doctorado en Economía en la Universidad Carlos III, España, es Magister en Economía en la Universidad del Rosario, Colombia y es Licenciado en Economía en la Universidad de Antioquia, Colombia.
Tiene cinco publicaciones en revistas indexadas sobre temas de economía, finanzas y educación superior. Además, ha publicado en dos revistas seriadas internacionales en la Universidade Federal Fluminence y en West Virginia University. También ha publicado un artículo en una revista no indexada y ha preparado 21 documentos de trabajo para la Universidad del Rosario, Colombia.

2. Material y métodos

El presente artículo estudia un modelo de producción–inventario con tasas de demanda y producción constantes planteado por H. Laniado y A. García en 2006.

2.1 Modelo

A diferencia del enfoque usual de estudios de producción y demanda (Blanchard, Parking), el modelo de producción–inventario con tiempo de espera proporcional al tiempo de producción, propuesto por Laniado y García, es un modelo determinístico que optimiza el costo. Para ello determina el número óptimo de ciclos en un determinado horizonte de planificación y por lo tanto determina la duración óptima de cada ciclo. En cada ciclo considera un período de producción inhabilitada (tiempo de espera) que es proporcional al tiempo de producción habilitada (tiempo de producción). Esta consideración es muy útil y poco estudiada, ya que permite incluir los períodos de parada de equipos necesarios para fines de mantenimiento, regulación, refrigeración y otros, que se pueden considerar proporcionales al tiempo de trabajo efectivo de los equipos. En cuanto a los costos, incluye principalmente el costo de producción y el costo de mantención del inventario.
El modelo considera primero tres casos que se derivan al comparar la constante de proporcionalidad (a) y el cociente entre las tasas de producción y de demanda. En cada caso se encuentra el número óptimo de ciclos en que debe dividirse el horizonte de planificación para maximizar la utilidad. Luego se considera un cuarto caso que analiza las condiciones en que es conveniente la sobreproducción. El quinto caso considera que la tasa de producción es menor a la tasa de demanda y que la diferencia es atendida mediante un distribuidor externo.
El modelo considera los siguientes supuestos:

1. Las tasas por unidad de tiempo de demanda y producción son conocidas y se mantienen constantes durante todo el horizonte de planificación.
2. La demanda (consumo) empieza cuando el tiempo de producción (producción habilitada) termina.
3. El tiempo de espera (producción inhabilitada) de los equipos es proporcional al tiempo de producción (producción habilitada).

Se utiliza la siguiente notación:
m: horizonte de planificación
N: número de ciclos en el horizonte de planificación
T: tiempo de espera en cada ciclo (en que la producción está inhabilitada)
T’: tiempo de producción en cada ciclo (en que la producción está habilitada)
a: constante de proporcionalidad:

$$a = \frac{tiempo\ de\ espera\ (T)}{tiempo\ de\ producción\ (T')}$$

r: tasa de producción por unidad de tiempo
d: tasa de demanda por unidad de tiempo
s: costo fijo de preparación de cada ciclo
p: precio unitario de venta
c: costo unitario de producción
h: costo unitario de mantenimiento de inventario en el horizonte de planificación
i: costo unitario por demanda insatisfecha
k: precio de salvamento

2.2 Descripción del modelo

Con la notación mencionada, el tiempo de producción en cada ciclo es:

$$Tiempo\ de\ producción = (\frac{m}{N} - T\ )$$

Utilizando la constante de proporcionalidad (a), el tiempo de espera en cada ciclo (T) es:

$$T = a(\frac{m}{N} - T\ )$$

Despejando, el tiempo de espera (T) es:

$$T = \frac{am}{(a+1)N}$$

Y el tiempo de producción (T’) es:

$$T' = \frac{m}{(a+1)N}$$

La producción por ciclo (Q) es:

$$Q = r\,\frac{m}{(a+1)N}$$

En el estudio se consideran tres casos. El primer caso es cuando el cociente entre las tasas de producción (r) y demanda (d) es menor a la constante de proporcionalidad (a), es decir:

$$Caso\ 1:\ \frac{r}{d} < a$$

Después de analizarán:

$$Caso\ 2:\ a \leq \frac{r}{d} \leq a+1$$

$$Caso\ 3:\ a+1 < \frac{r}{d}$$

Nivel de inventario: I(t).

El nivel de inventario I(t) es una función del tiempo (t) que representa la cantidad almacenada en cualquier instante.
Como se menciona en el supuesto (2): el estudio considera que la demanda (consumo) empieza cuando el tiempo de producción (producción habilitada) termina.

$\boldsymbol{Caso\ 1:\ \frac{r}{d} < a}$

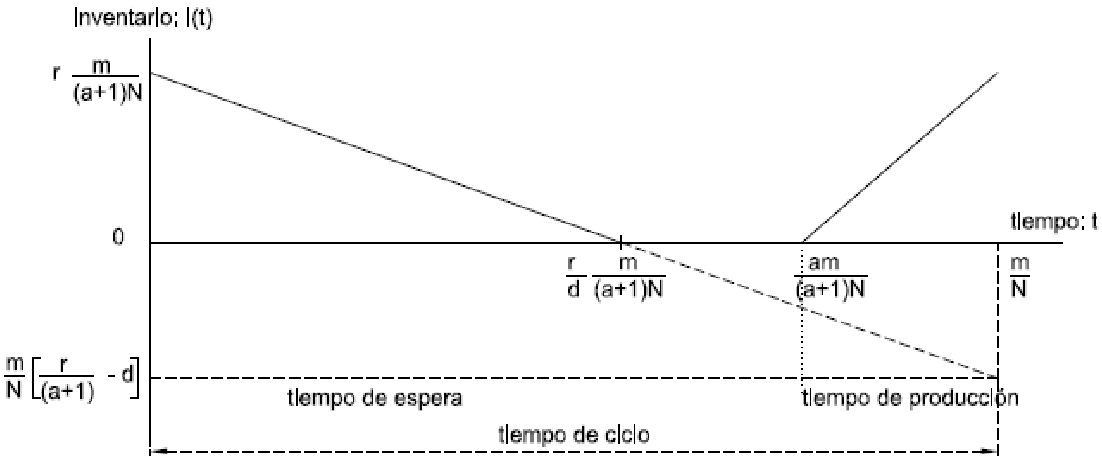
El nivel de inventario para cualquier instante del ciclo: $t\ \in\ \left[0, \frac{m}{N}\right]$ es el siguiente y se muestra en la Figura No.1:

$I(t) = r\,\frac{m}{(a+1)N} - dt$ si: $0 \leq t \leq \frac{r}{d}\frac{m}{(a+1)N}$ (sólo hay demanda)

$I(t) = 0$ si: $\frac{r}{d}\frac{m}{(a+1)N} < t < \frac{am}{(a+1)N}$ (no hay demanda ni producción)

$I(t) = rt - r\,\frac{am}{(a+1)N}$ si: $\frac{am}{(a+1)N} \leq t \leq \frac{m}{N}$ (sólo hay producción)

Figura N°1: Nivel de inventario para $Caso$ 1: $\frac{r}{d} < a$



Fuente: Elaboración propia

***Caso* 2**: $\boldsymbol{a \leq \frac{r}{d} \leq a+1}$

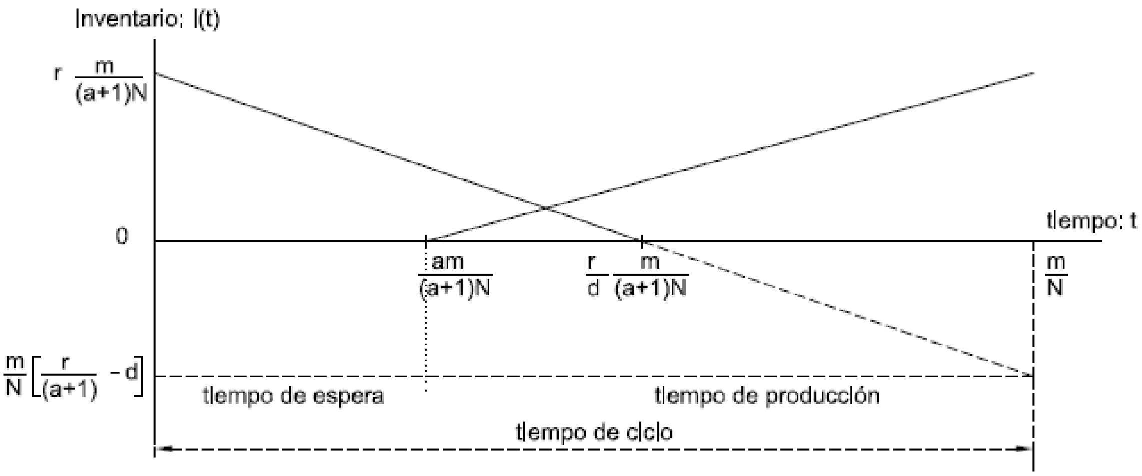
El nivel de inventario para cualquier instante del ciclo: $t \in \left[0, \frac{m}{N}\right]$ es el siguiente y se muestra en la Figura No.2:

$I(t) = r\,\frac{m}{(a+1)N} - dt$ si: $0 \leq t \leq \frac{am}{(a+1)N}$ (sólo hay demanda)

$I(t) = r\,\frac{(1-a)m}{(a+1)N} - (d-r)t$ si: $\frac{am}{(a+1)N} < t < \frac{r}{d}\frac{m}{(a+1)N}$ (demanda y producc)

$I(t) = rt - r\,\frac{am}{(a+1)N}$ si: $\frac{r}{d}\frac{m}{(a+1)N} \leq t \leq \frac{m}{N}$ (sólo hay producción)

Figura N°02: Nivel de inventario para $Caso$ 2: $a \leq \frac{r}{d} \leq a+1$



Fuente: Elaboración propia

En los casos 1 y 2, el inventario promedio se puede calcular integrando la función inventario: I(t), desde cero (0) al tiempo del ciclo (m/N) y dividiendo entre el tiempo del ciclo (m/N):

$$Inventario\ promedio = \frac{N}{m}\int_0^{\frac{m}{N}} I(t)dt = \frac{r(d+r)}{d}\frac{m}{2N(a+1)^2}$$

El costo de mantenimiento del inventario en todo el horizonte se obtiene multiplicando el inventario promedio por costo de mantenimiento de inventario por unidad en el horizonte de planificación (h):

$$Costo\ de\ mtto\ de\ inventario\ = h\ \frac{r(d+r)}{d}\frac{m}{2N(a+1)^2}$$

La cantidad de unidades no satisfechas durante el horizonte de planificación es la diferencia entre la cantidad demandada y la cantidad producida en todo el horizonte:

$$Cantidad\ no\ satisfecha = dm - r\ \frac{m}{a+1}$$

La cantidad no satisfecha genera un costo de déficit:

$$Costo\ de\ déficit = im(d - \frac{r}{a+1})$$

Entonces, la utilidad en el horizonte de planificación U(N), para los casos 1 y 2 es:

$$U(N) = \begin{matrix} utilidad\ de \\ prod.vendidos \end{matrix} - \begin{matrix} costo\ de \\ inventario \end{matrix} - \begin{matrix} costo\ de \\ déficit \end{matrix} - \begin{matrix} costo\ de \\ preparación \end{matrix}$$

$$U(N) = (p-c)r\frac{m}{a+1} - h\ \frac{r(d+r)}{d}\frac{m}{2N(a+1)^2} - im\left(d - \frac{r}{a+1}\right) - Ns \quad (2)$$

Se puede encontrar el número óptimo de ciclos (N’) que maximiza la utilidad al derivar U(N) respecto de N e igualando a cero.

Entonces para los casos 1 y 2, es decir: $\frac{r}{d} \leq a+1$

$$Número\ óptimo\ de\ ciclos = N' = \left[\frac{hmr(d+r)}{2sd(a+1)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Ejemplo de casos 1 y 2

Si se tiene la siguiente información:

Demanda anual=10 000 u

Horizonte: m = 250 días

Demanda: d = 40 u/día

Producción: r = 36u/día

Costo de preparación: s = \$200/setup

Precio unitario de venta: p = \$40/u

Costo unitario de producción: c = \$30/u

Costo unitario de demanda insatisfecha: i = \$5/u

Costo unitario de mantenimiento de inventario: h = 20% del costo de producción

Constante de proporcionalidad: a = 1.5 (tiempo de espera/tiempo de producción)

Se verifica que: $\frac{r}{d} \leq a+1$, entonces el número óptimo de ciclos que maximiza la utilidad en todo el horizonte se puede calcular con:

$$Número\ óptimo\ de\ ciclos = N' = \left[\frac{hmr(d+r)}{2sd(a+1)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = 6.406\ ciclos$$

La producción óptima por ciclo (Q') es:

$$Q' = r\,\frac{m}{(a+1)N'} = \ 561.95\ unidades$$

La producción total en el horizonte de planificación es:

$$\begin{matrix} Producción \\ total \end{matrix} = \begin{pmatrix} Número \\ de\ ciclos \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} Producción \\ por\ ciclo \end{pmatrix} = N.Q = 3600\ unidades$$

Se tiene una demanda insatisfecha anual de 6400 unidades.
De (2) se puede calcular la utilidad máxima en el horizonte: \$1437.50

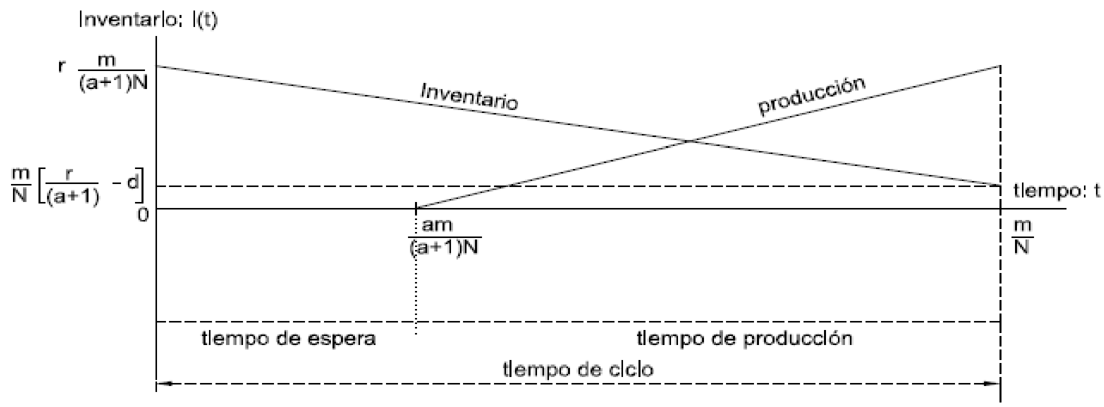
$\boldsymbol{Caso\ 3}$: $\boldsymbol{a + 1 < \frac{r}{d}}$

El nivel de inventario para cualquier instante del ciclo: $t \in \left[0, \frac{m}{N}\right]$ es el siguiente y se muestra en la Figura No.3:

$I(t) = r\,\frac{m}{(a+1)N} - dt$ si: $\quad 0 \leq t \leq \frac{am}{(a+1)N}$ $\quad$ (sólo hay demanda)

$I(t) = r\,\frac{(1-a)m}{(a+1)N} - (d-r)t$ si: $\frac{am}{(a+1)N} < t \leq \frac{m}{N}$ (hay demanda y producción)

Figura N°03: Nivel de inventario para $Caso\ 3$: $a + 1 < \frac{r}{d}$



Fuente: Elaboración propia

En este caso no se presenta demanda insatisfecha, por el contrario, hay sobreproducción, que puede ser vendida a un precio de salvamento (k) por cada unidad
La cantidad de la sobreproducción en todo el horizonte será:

$$Sobreproducción = -m(d - r\,\frac{1}{a+1})$$

La sobreproducción genera utilidad al ser vendida a un precio de salvamento (k) por cada unidad:

$$Utilidad\ de\ la\ sobreproducción = km(\frac{r}{a+1} - d)$$

El inventario promedio se puede calcular integrando la función inventario: I(t), desde cero (0) al tiempo del ciclo (m/N) y dividiendo entre el tiempo del ciclo (m/N):

$$Inventario\ promedio = \frac{N}{m}\int_0^{\frac{m}{N}} I(t)dt = -\frac{m[a^2d + 2a(d-r) + d - 3r]}{2N(a+1)^2}$$

El costo de mantenimiento del inventario en todo el horizonte se obtiene multiplicando el inventario promedio por costo de mantenimiento de inventario por unidad (h):

$$Costo\ de\ mtto\ de\ Inventario = -h\frac{m[a^2d + 2a(d-r) + d - 3r]}{2N(a+1)^2}$$

Entonces, la utilidad en el horizonte de planificación U(N), para el caso 3 es:

$$U(N) = \frac{utilidad\ de}{prod.vendidos} - \frac{costo\ de}{inventario} + \frac{utilidad\ de\ la}{sobreproducción} - \frac{costo\ de}{preparación}$$

$$U(N) = (p-c)r\frac{m}{a+1} + h\frac{m[a^2d + 2a(d-r) + d - 3r]}{2N(a+1)^2} + km\left(\frac{r}{a+1} - d\right) - Ns\ (4)$$

Se puede demostrar que el número óptimo de ciclos (N') que maximiza la utilidad U(N) para el caso 3, es decir: $a + 1 < \frac{r}{d}$; es:

$$Número\ óptimo\ de\ ciclos = N' = \left[\frac{-hm[a^2 + 2a(d-r) + d - 3r]}{2s(a+1)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Ejemplo del caso 3

Si se tiene la siguiente información:

Demanda anual=7 500 u

Horizonte: m = 250 días

Demanda: d = 30 u/día

Producción: r = 40 u/día

Costo de preparación: s = \$200/setup

Precio unitario de venta: p = \$40/u

Costo unitario de producción: c = \$30/u

Precio unitario de salvamento: k = \$5/u

Costo unitario de mantenimiento de inventario: h = 20% del costo de producción

Constante de proporcionalidad: a = 0.3 (tiempo de espera/tiempo de producción)

Se verifica que: $a + 1 < \frac{r}{d}$, entonces el número óptimo de ciclos que maximiza la utilidad en todo el horizonte se puede calcular con:

$$Núm.óptimo\ de\ ciclos = N' = \left[\frac{-hm[a^2 + 2a(d-r) + d - 3r]}{2s(a+1)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = 14.38\ ciclos$$

La producción óptima por ciclo (Q') es:

$$Q' = r\frac{m}{(a+1)N'} = 534.62\ unidades$$

La producción total en el horizonte de planificación es:

$$\frac{Producción}{total} = \binom{Número}{de\ ciclos} \cdot \binom{Producción}{por\ ciclo} = N.Q = 7687.8\ unidades$$

Se tiene una sobreproducción anual de 187.8 unidades.

De (4) se puede calcular la utilidad máxima en el horizonte: $64 437

Caso 4. El problema de la sobreproducción

Para que sea conveniente la sobreproducción es necesario que el precio unitario de salvamento (k) sea mayor al costo unitario de producción (c). Por otro lado, el precio unitario de salvamento (k) debe ser menor que el precio unitario de venta (p) para que la cantidad sobreproducida logre ser vendida, aunque ya se satisfizo la demanda. Entonces:

$$c < k < p$$

En caso que el precio unitario de salvamento (k) sea menor al costo unitario de producción (c): k < c; habrá que producir sólo para que el inventario al final del ciclo sea cero, es decir:

$$I\left(\frac{m}{N}\right) = 0$$

Reemplazando en expresión de inventario en el caso 3:

$$I(t) = r\,\frac{m}{(a+1)N} - dt$$

$$I\left(\frac{m}{N}\right) = r\,\frac{m}{(a+1)N} - d\left(\frac{m}{N}\right) = 0$$

Entonces la constante de proporcionalidad para inventario final nulo (a') es:

$$\begin{matrix} Constante\ de\ proporcionalidad \\ para\ inventario\ final\ nulo \end{matrix} = a' = \frac{r}{d} - 1$$

Caber resaltar que para que el inventario final sea cero (no exista sobreproducción), se deberá aumentar el tiempo de espera y reducir el tiempo de producción, por lo que:

$$a' > a$$

Entonces, el tiempo de espera (T) en un ciclo, para inventario final nulo es:

$$T = \frac{(r-d)m}{rN}$$

Y el tiempo de producción (T') en un ciclo, para inventario final nulo es:

$$T' = \frac{dm}{rN}$$

Por lo que la cantidad producida (Q) en un ciclo es:

$$Q = d\frac{m}{N}$$

De manera similar a los casos anteriores, el nivel de inventario I(t), para cualquier instante del ciclo: $t \in \left[0, \frac{m}{N}\right]$ es el siguiente:

$I(t) = d(\frac{m}{N}) - dt$ si: $0 \leq t \leq \frac{(r-d)m}{rN}$ (sólo hay demanda)

$I(t) = (2d - r)\ \frac{m}{N} - (d - r)t$ si: $\frac{(r-d)m}{rN} < t \leq \frac{m}{N}$ (hay demanda y producción)

El inventario promedio se puede calcular integrando la función inventario: I(t), desde cero (0) al tiempo del ciclo (m/N) y dividiendo entre el tiempo del ciclo (m/N):

$$Inventario\ promedio = \frac{N}{m}\int_0^{\frac{m}{N}} I(t)dt = \frac{d(d+r)m}{2rN}$$

El costo de mantenimiento del inventario en todo el horizonte se obtiene multiplicando el inventario promedio por costo de mantenimiento de inventario por unidad (h):

$$Costo\ de\ mtto\ de\ Inventario = h\ \frac{d(d+r)m}{2rN}$$

Entonces, la utilidad en el horizonte de planificación U(N), para el caso 3 es:

$$U(N) = \frac{utilidad\ de}{prod.vendidos} - \frac{costo\ de}{inventario} - \frac{costo\ de}{preparación}$$

$$U(N) = (p-c)dm + h\frac{d(d+r)m}{2rN} - Ns$$

Y el número óptimo de ciclos (N') que maximiza la utilidad U(N) es:

$$Número\ óptimo\ de\ ciclos = N' = \left[\frac{hmd(d+r)}{2rs}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Caso 5. Modelo de producción limitada y orden externa

Para no tener problemas de fidelidad de los clientes, se analiza este caso en donde se evita tener demanda insatisfecha adquiriendo los productos faltantes a un proveedor externo.

El análisis es similar a los casos 1 y 2, es decir: $\frac{r}{d} \leq a + 1$

Cantidad solicitada en cada ciclo al proveedor externo, es la cantidad faltante (Qo):

$$Orden\ externa: Qo = \left(d - \frac{r}{a+1}\right)\frac{m}{N} \qquad (5)$$

Adicionalmente se consideran los siguientes supuestos:

- No hay agotamiento de existencias.
- La obtención de la orden externa no afecta el tiempo de producción de la orden interna.
- La orden externa es recibida y se ubica en el lote de producción.

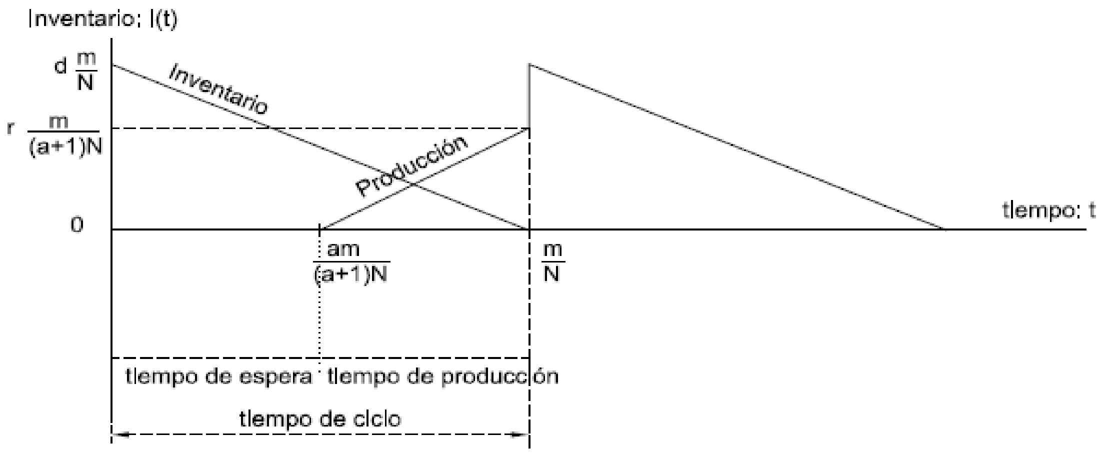
La notación adicional es:
v: costo unitario de lo solicitado al distribuidor externo
Qo: cantidad solicitada al distribuidor externo
O: costo fijo de cada orden externa, independiente del volumen.

El nivel de inventario I(t), para cualquier instante del ciclo: $t \in \left[0, \frac{m}{N}\right]$ es el siguiente y se puede ver en la Figura 4:

$I(t) = d(\frac{m}{N}) - dt$ si: $0 \leq t \leq \frac{am}{(a+1)N}$ (sólo hay demanda)

$I(t) = d\left(\frac{m}{N}\right) - \frac{ram}{(a+1)N} - (d-r)t$ si: $\frac{am}{(a+1)N} < t \leq \frac{m}{N}$ (hay demanda y producción)

Figura N°04: Modelo de producción limitada y orden externa



Fuente: Elaboración propia

El inventario promedio es:

$$Inventario\ promedio = \frac{N}{m}\int_0^{\frac{m}{N}} I(t)dt = \frac{(a^2d + 2ad + d + r)m}{2(a+1)^2N}$$

El costo de mantenimiento del inventario es:

$$Costo\ de\ mtto\ del\ inventario\ = h\,\frac{(a^2d + 2ad + d + r)m}{2(a+1)^2N}$$

La demanda total en todo el horizonte es: *dm* unidades.

Como no hay déficit, el ingreso es: *p.d.m*

La utilidad en todo el horizonte U(N) es:

$$U(N) = pdm - vm\left[d - \frac{r}{a+1}\right] - c\frac{rm}{a+1} - h\,\frac{(a^2d + 2ad + d + r)m}{2(a+1)^2N} - N(s+O)$$

La utilidad se maximiza el número de ciclos N':

$$Número\ óptimo\ de\ ciclos = N' = \left[h\,\frac{(a^2d + 2ad + d + r)m}{2(a+1)^2(s+O)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Ejemplo del caso 5

Si se tiene la siguiente información:

Demanda anual=10 000 u

Horizonte: m = 250 días

Demanda: d = 40 u/día

Producción: r = 36 u/día

Costo de preparación: s = $200/setup

Precio unitario de venta: p = $40/u

Costo unitario de producción: c = $30/u

Costo unitario de lo solicitado al distribuidor externo: v = $42/u

Costo unitario de mantenimiento de inventario: h = 20% del costo de producción

Constante de proporcionalidad: a = 1.5 (tiempo de espera/tiempo de producción)

Costo fijo de cada orden externa: O = $100

Se verifica que: $\frac{r}{d} < a + 1$, entonces el número óptimo de ciclos que maximiza la utilidad en todo el horizonte se puede calcular con:

$$Número\ óptimo\ de\ ciclos = N' = \left[h\,\frac{(a^2d + 2ad + d + r)m}{2(a+1)^2(s+O)}\right]^{\frac{1}{2}} = 11.72\ ciclos$$

La producción óptima por ciclo (Q') es:

$$Q' = r\,\frac{m}{(a+1)N'} = 307.16\ unidades$$

La producción total en el horizonte de planificación es:

$$\begin{matrix} Producción \\ total \end{matrix} = \begin{pmatrix} Número \\ de\ ciclos \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} Producción \\ por\ ciclo \end{pmatrix} = N.Q = 3600\ unidades$$

Se tiene una demanda insatisfecha anual de 6400 unidades.

La cantidad solicitada en cada ciclo al proveedor externo, (Qo):

$$Orden\ externa: Qo = \frac{demanda\ insatisfecha}{N'} = \frac{6400}{11.72} = \ 546.1\ u/ciclo$$

La utilidad máxima en el horizonte es: $16 755.68

3. Resultados

El modelo propuesto por Laniado y García maximiza la utilidad mediante el cálculo del número de ciclos óptimos en un determinado horizonte de planificación. La optimización de la utilidad depende del costo de mantenimiento del inventario y de los costos fijos de preparación de cada ciclo, como componentes de la utilidad que son afectados por el número de ciclos.

Adicionalmente, la sobreproducción es tratada como un caso adicional que tiene doble costo asociado, el costo de producción y el costo de mantenimiento del inventario. Por ello se establecen dos alternativas: vender la sobreproducción a un precio de salvamento, mayor que el costo de producción y menor que el precio de venta y cambiar la constante de proporcionalidad para que no exista sobreproducción.

Laniado y García dejan como propuesta para análisis a futuro, analizar el comportamiento del modelo con tasa de demanda y producción no constantes.

4. Discusión

A la fecha no se conoce que este modelo se haya aplicado a una situación real, aunque es evidente que el modelo es muy útil para reducir los costos de producción en situaciones reales donde el tiempo de parada de la planta es proporcional al tiempo de trabajo.

Como el modelo ayuda a encontrar el número óptimo de ciclos a trabajar en un horizonte de planificación determinado, también se puede determinar el tiempo de producción por ciclo (producción habilitada) y por lo tanto el tiempo de espera (producción inhabilitada). Entonces, se puede optimizar el tiempo productivo (producción habilitada), por lo tanto, se puede determinar los tamaños óptimos de producción y todo lo que ello implica, como compras de materia prima, volúmenes y tiempos de entregas parciales a los clientes, programación del personal, etc.

Por otro lado, al optimizar el tiempo de espera (producción inhabilitada), se pueden optimizar el tiempo y trabajo de mantenimiento de los equipos, regulación, puesta a punto de máquinas, descanso de personal, etc.

5. Agradecimiento

Agradezco a mi familia por colaborar pacientemente al darme el tiempo y tranquilidad para preparar el presente artículo, al Dr. Francisco Wong por la oportunidad y motivación para hacerlo y al Dr. Henry Laniado por su tiempo en absolver rápidamente las consultas realizadas.

6. Literatura Citada

Blanchard O., Amighini A., Giavazzi F. (2012) Macroeconomía. Pearson Educación S. A. Madrid. pp.51.

Laniado H., García A. (2006) Modelo producción–inventario con tiempo de espera proporcional al tiempo de producción. Ingeniería y Ciencia, ISSN 1794-9165. Volumen 2, número 3, páginas 51-64, marzo.

Parkin M. (2007) Macroeconomía. Pearson Educación. México. pp.79.

Universidad EAFIT. Tomado de: http://www.eafit.edu.co/docentes-investigadores/Paginas/henry-laniado-rodas.aspx, el 15/07/2018

Universidad del Rosario. Tomado de: http://www.urosario.edu.co/Profesores/Listado-de-profesores/G/Garcia-Suaza-Andres-Felipe/, el 16/07/2018